حل الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

دورة 19 ماي 2012

التمرين الأول : (05 نقاط) من إعداد:تـوامـي -ع

1/ أ- إثبات أن للمعادلة (1) حلين مترافقين :

المعادلة (1) تقبل حلين مترافقين إذا كان مميز هذه المعادلة سالباً

لنحسب المميز: Δ

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta)$

إذن من أجل كل $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا $0 \prec \Delta$ وَ بالتالي للمعادلة (1) حلين مترافقين :

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) :

لدينا : $\Delta = -4\sin^2(\theta) = i^2 4\sin^2(\theta) = (i2\sin(\theta))^2$

منه : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ وَ $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

جـ- حساب قيمة : $\frac{z_1^{2012} + z_2^{2012}}{1 + z_1^{2012} \times z_2^{2012}}$

لدينا حسب دستور موافر : $\begin{cases} z_1^{2012} = \cos(2012\theta) + i\sin(2012\theta) \\ z_2^{2012} = \cos(2012\theta) - i\sin(2012\theta) \end{cases}$

منه : $z_1^{2012} + z_2^{2012} = 2\cos(2012\theta)$ وَ $z_1^{2012} \times z_2^{2012} = (z_1 z_2)^{2012} = 1^{2012} = 1$

إذن: $\frac{z_1^{2012} + z_2^{2012}}{1 + z_1^{2012} \times z_2^{2012}} = \frac{2\cos(2012\theta)}{2} = \cos(2012\theta)$ نستنتج أنه عدد حقيقي موجب

2/ أ- حساب : $\overline{Z}$ بدلالة z_1 وَ z_2

لدينا : $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \times z_2}$ منه : $\overline{Z} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \times \overline{z_2}}$

نعلم أن $|z_1| = 1$ وَ $|z_2| = 1$ منه : $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ وَ $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$

إذن : $\overline{Z} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2}}{\frac{z_1 \times z_2 + 1}{z_1 \times z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2 + 1}$

ب- استنتاج أن Z عدد حقيقي موجب :

بما أن $\overline{Z} = Z$ وَ $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ فإن Z عدد حقيقي موجب .

3/ أ- إنشاء النقط : A ، B ، C وَ D .

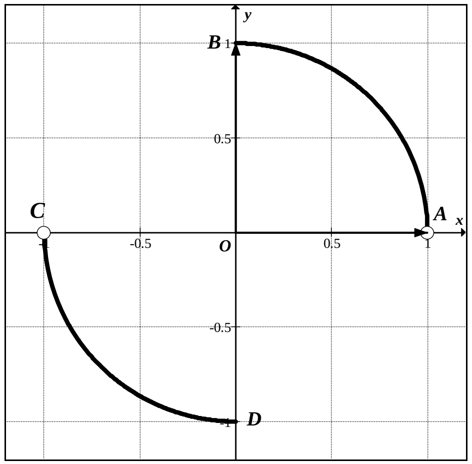
ب- تعين وَ إنشاء مجموعة النقط : M

لدينا : $\begin{cases} z = z_1 \\ z = -\overline{z_2} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} z = z_1 \\ z = -z_1 \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ z = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi) \end{cases}$

لاحظ جيدا أنه من أجل $\theta = 0$ نحصل على النقطة $A(1,0)$ أو النقطة $C(-1,0)$

وَ من أجل $\theta = \frac{\pi}{2}$ نحصل على النقطة $B(0,1)$ أو النقطة $D(0,-1)$

- مجموعة النقط $M(z_1)$ هي القوس $\widehat{AB}$ من الدائرة التي مركزها النقطة $O(0,0)$ و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة A .
- مجموعة النقط $M(-\overline{z_2})$ هي القوس $\widehat{CD}$ من الدائرة التي مركزها النقطة $O(0,0)$ و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة C .



التمرين الثاني: (04 نقاط) من إعداد:توامي -ع

1/أ- لنبين أن النقط A ، B وَ C تعين مستوياً .

يكفي أن نبين أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,1,2)$ مع : $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{1}\neq\frac{3}{2}$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا و بالتالي النقط A ، B وَ C تعين مستوي .

ب- لنتحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $3x-y-z-12=0$

بما أن : $3x_A-y_A-z_A-12=3+3+6-12=0$ فإن : $A\in(ABC)$

وَ : $3x_B-y_B-z_B-12=9-0+3-12=0$ فإن : $B\in(ABC)$

وَ : $3x_C-y_C-z_C-12=6+2+4-12=0$ فإن : $C\in(ABC)$

فإن المعادلة : $3x-y-z-12=0$ هي المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) .

2/ أ- لنبين أن تقاطع المستويان (P) وَ (P') هو المستقيم : (Δ)

لدينا : $\begin{cases}(P):2x-y-6=0\\(P'):x-y+z=0\end{cases}$ بالطرح نجد : $x-6-z=0$ أي : $z=x-6$

بوضع : $x=k$ نجد : $z=k-6$ و نعوض في إحدى المعادلتين فنجد : $y=2k-6$

إذن : $(P)\cap(P')=(\Delta)$

ب- تعين تقاطع المستويات : (ABC) ، (P) وَ (P')

بما أن : $3(k)-(2k-6)-(k-6)-12=3k-2k+6-k+6-12=0$

أي : $(\Delta)\subset(ABC)$ وَ $(P)\cap(P')=(\Delta)$ فإن : $(ABC)\cap(P)\cap(P')=(\Delta)$

3/ أ- لنبين أن المستويات (π_m) تشمل المستقيم : (Δ)

لدينا : $(2-m)x-y+mz+6m-6=0$

تكافئ : $2x-mx-y+mz+6m-6=0$

تكافئ : $m(-x+z+6)+2x-y-6=0$

تكافئ : $\begin{cases}(P):-x+z+6=0\\(P'):2x-y-6=0\end{cases}$ بوضع $x=k$ نجد : $z=k-6$ وَ $y=2k-6$

إذن من أجل كل $m\in\mathbb{R}$ فإن المستويات (π_m) تشمل مستقيماً ثابتاً وَ هو (Δ) .

ب- معادلة سطح الكرة : (S)

بما أن المركز $\omega(2,1,2)$ وَ نصف القطر 3 فإن : $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

ج- تعين قيم : m

بما أن المستويات (π_m) تمس الكرة (S) فإن : $d(\omega;(\pi_m))=3$

تكافئ : $\frac{|(2-m)x_\omega-y_\omega+mz_\omega+6m-6|}{\sqrt{(2-m)^2+(-1)^2+m^2}}=3$

تكافئ : $\frac{|2(2-m)-1+2m+6m-6|}{\sqrt{4-4m+m^2+1+m^2}}=3$

تكافئ : $\frac{|6m-3|}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=3$ تكافئ : $|2m-1|=\sqrt{2m^2-4m+5}$ بالتربيع الطرفين

نجد : $(2m-1)^2=2m^2-4m+5$ تكافئ : $4m^2-4m+1=2m^2-4m+5$

تكافئ : $m^2=2$ فنجد : $m=\sqrt{2}$ أو $m=-\sqrt{2}$

التمرين الثالث : (04 نقاط) من إعداد:توامي -ع

1/ تعين الأعداد الصحيحة : n

لدينا : $n+3=n-1+4$

$(n-1)$ يقسم $(n+3)$ معناه : $(n-1)$ يقسم 4 أي : $(n-1)\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}$

منه : $n\in\{-3,-1,0,2,3,5\}$

1/ لنبرهن أن العددين a وَ b أوليان فيما بينهما :

ليكن : $d=p\gcd(a,b)$ منه : $\begin{cases}d/n-1\\d/n^2+2n-2\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}d/2n-2\\d/n^2+2n-2\end{cases}$ بالطرح

نجد: d/n^2 أي : d/n فينتج : $\begin{cases}d/n-1\\d/n\end{cases}$ منه : $d/1$ أي : $d=1$

إذن : $p\gcd(a,b)=1$ أي العددين a وَ b أوليان فيما بينهما .

طريقة 2: لاحظ أن : $n^2+2n-2=(n-1)(n+3)+1$ منه : $b=a(n+3)+1$

وَ حسب خوارزمية اقليدس فإن : $p\gcd(a,b)=p\gcd(a,1)=1$

إذن العددين a وَ b أوليان فيما بينهما .

ب- استنتاج القاسم المشترك الأكبر :

لاحظ أن : $n^3-n^2+n-1=(n^2+1)(n-1)$

وَ $n^4+2n^3-n^2+2n-2=(n^2+1)(n^2+2n-2)$

إذن :
$$p\gcd(n^4+2n^3-n^2+2n-2\ ,\ n^3-n^2+n-1)$$
$$=(n^2+1)\,p\gcd(n-1\ ,\ n^2+2n-2)=n^2+1$$

3/ تعين قيم العدد الصحيح n :

$(n-1)(n^2+1)$ قاسم للعدد $(n+3)(n^2+2n-2)$ معناه يوجد عدد صحيح k

حيث : $(n+3)(n^2+2n-2)=(n-1)(n^2+1)k$

منه : $\begin{cases}(n-1)/(n+3)(n^2+2n-2)\\ p\gcd(n-1,n^2+2n-2)=1\end{cases}$ و حسب نظرية غوص (GAUSS)

ينتج أن : $(n-1)/(n+3)$ و حسب السوال الأول ينتج : $n\in\{-3,-1,0,2,3,5\}$

من بين هذه القيم نجد $n=-3$ وَ $n=0$ وَ $n=2$ هي التي تجعل $(n-1)(n^2+1)$ يقسم العدد $(n+3)(n^2+2n-2)$.

التمرين الرابع : (07 نقاط) من إعداد:تـوامـي -ع

I- 1/ دراسة تغيرات الدالة g :

- مجموعة التعريف : $D_g=]0;+\infty[$
- حساب النهايات : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
- الدالة المشتقة : الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على D_g حيث : $g'(x)=1+\frac{2}{x}\succ 0$

منه g دالة متزايدة تماماً .

- جدول التغيرات:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty \nearrow +\infty$

2/ حساب $g(1)$ و استنتاج إشارة $g(x)$:

$g(1)=0$ ، و حسب جدول تغيرات الدالة g نستنتج أنه :

إذا كان : $x\in]0;1[$ فإن : $g(x)\prec 0$ ، إذا كان : $x\in]1;+\infty[$ فإن : $g(x)\succ 0$

3/ الاستنتاجات :

- من أجل: $0\prec x\prec 1$ لدينا : $\frac{1}{x}\succ 1$ و g متزايدة تماماً فإن: $g\left(\frac{1}{x}\right)\succ g(1)$ إذن : $g\left(\frac{1}{x}\right)\succ 0$
- من أجل : $x\succ 1$ لدينا : $\frac{1}{x}\prec 1$ و g متزايدة تماماً فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)\prec g(1)$ إذن : $g\left(\frac{1}{x}\right)\prec 0$

II- 1/ أ- دراسة استمرارية الدالة f عند $x_0=0$

f دالة مستمرة عند $x_0=0$ يعني : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\left(1-e^x+2\sqrt{1-e^x}\right)=f(0)=0$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(x-x^2\ln x\right)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x.(1-x\ln x)=0$$

بما أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=f(0)=0$ فإن f دالة مستمرة عند $x_0=0$.

ب- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$

f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ يعني : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ell$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{1-e^x+2\sqrt{1-e^x}}{x}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[-\frac{e^x-1}{x}+2\frac{\sqrt{1-e^x}}{x}\right]$$

$$=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[-\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{1}-2\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{1}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}}_{+\infty}\right]=-\infty$$

بما أن النهاية غير منتهية فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C) يقبل مماساً عند النقطة $O(0;0)$ يوازي محور التراتيب .

2/ لنبين أن: $f'(x)=x.g\left(\frac{1}{x}\right)$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f(x)=x-x^2\ln x$

منه : $f'(x)=1-2x\ln x-x=x\left(\frac{1}{x}-1+2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x.g\left(\frac{1}{x}\right)$

3/ دراسة تغيرات الدالة f :

– مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty;+\infty[$

– حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty$

– الدالة المشتقة : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث :

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right) & ; \ x \prec 0 \\ x.g\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \ x \succ 0 \end{cases}$$

– إشارة المشتقة :

- إذا كان : $x \in]-\infty;0[$ فإن $f'(x) \prec 0$ و بالتالي f دالة متناقصة تماماً .
- إذا كان : $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = x.g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ منه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$
  - ❖ لما $x \in]0;1[$ فإن : $f'(x) \succ 0$ و بالتالي f دالة متزايدة تماماً .
  - ❖ لما $x \in]1;+\infty[$ فإن : $f'(x) \prec 0$ و بالتالي f دالة متناقصة تماماً .
  - ❖ لما $x = 1$ فإن : $f'(1) = 0$

– جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	+	0	-	
$f(x)$	3	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

– **دراسة الفروع اللانهائية لـ (C) :**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ ، منه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 3$ بجوار $-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته: $y = a.x + b$ بجوار $+\infty$

حساب a : $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - x^2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x\ln x) = -\infty$

منه (C) يقبل فرع قطع مكافئ اتجاه محور التراتيب و بجوار $+\infty$

4/ أ- إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

- لدينا : $f\left(\dfrac{7}{4}\right) \approx 0{,}036$ ، $f(2) \approx -0{,}77$ منه $f\left(\dfrac{7}{4}\right) \times f(2) \prec 0$
- الدالة f مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $\left[\dfrac{7}{4};2\right]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $\dfrac{7}{4} \prec \alpha \prec 2$

ب – إثبات أن : $g(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha}$

لدينا : $f(\alpha) = 0$ تكافئ: $\alpha - \alpha^2\ln\alpha = 0$ تكافئ: $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ ....(1)

وَ لدينا : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$ منه : $g(\alpha) = \alpha - 1 + 2\ln\alpha$ ....(2)

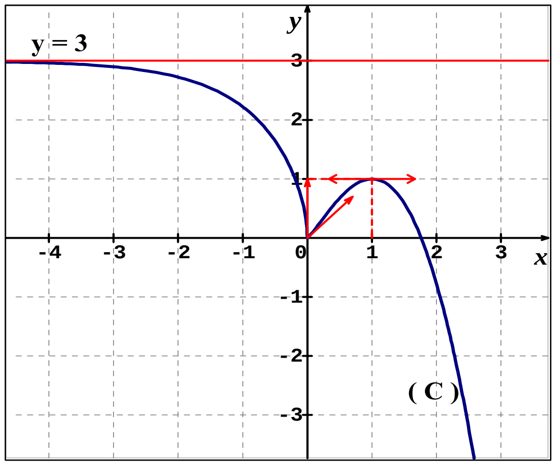
بتعويض (1) في (2) نجد : $g(\alpha) = \alpha - 1 + \dfrac{2}{\alpha}$ تكافئ: $g(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha}$ و هو المطلوب .

– استنتاج حصراً للعدد $g(\alpha)$

بما أن : $\dfrac{7}{4} \prec \alpha \prec 2$ و الدالة g متزايدة تماماً على $]0;+\infty[$

فإن : $g\left(\dfrac{7}{4}\right) \prec g(\alpha) \prec g(2)$ منه : $1{,}86 \prec g(\alpha) \prec 2{,}38$

5/ إنشاء (C):



أتمنى لكم النجاح في البكالوريا

الأستاذ : تـوامــي - عـمــر